Новая схема учета нерадиационных потоков тепла в задаче распространения тепловых фотонов в атмосфере

© 2007 Макарьева А.М., Горшков В.Г.

Расширенный текст постера, представленного на Генеральной Ассамблее Европейского Союза Наук о Земле, 15-20 апреля 2007 г.
Постер (включая аннотацию и рисунки, англ.)
см. на www.bioticregulation.ru/ab.php?id=foton&lang=ru

1. Перенос солнечного и лазерного излучения в атмосфере

Перенос излучения в пространстве означает, что существует поток энергии излучения в определенном направлении. Выбирая оси координат так, чтобы направление потока излучения совпадало с осью z, получаем известное уравнение для спектральной плотности пучка лучей в единичном телесном угле, в единичном интервале частоты ν, распространяющегося под углом ϑ к оси z, называемой интенсивностью излучения $I(z,\vartheta)$:

$$\mu \frac{\partial I(z,\mu)}{\partial z} = -\frac{1}{l(z)}\{I(z,\mu) - S(z)\},$$

$$\mu \frac{\partial I(\tau,\mu)}{\partial \tau} = +I(\tau,\mu) - S(\tau),\ d\tau \equiv -\frac{dz}{l(z)}, \quad \mu = \cos\vartheta, \qquad (1)$$

где $l(z) = [\sigma n(z)]^{-1}$ – средняя длина свободного пробега фотона, σ — поперечное сечение поглощения (называемое также коэффициентом поглощения), $n(z)$ – плотность числа молекул поглотителя в среде; $d\tau \equiv -dz/l(z)$ – оптическая длина пути, отсчитываемая противоположно направленю z; $S(\tau)$ – изотропная плотность потока излучения среды на единицу оптической длины пути, называемая функцией источника. Полагая $\mu = 0$ в (1), получаем:

$$S(\tau) = I(\tau, 0). \qquad (2)$$

Подчеркнем, что уравнение (1) и соотношение (2) представляют собой наиболее общий вид распространения излучения в среде, не предполагающее стратифицированности этой среды (атмосферы). Первый член правой части уравнения (1) соответствует поглощению излучения средой. При этом уменьшение интенсивности dI за счет поглощения на протяжении средней длины свободного пробега $dz = l$ (на оптическом пути $-d\tau = 1$) равно величине интенсивности, т.е. $-dI = I$ при $-d\tau = 1$. Это соответствует следующей физике: все излучение в среднем поглощается на средней длине свободного пробега. Однако в первых двух членах уравнения (1) записана также информация о характере среды: поглощение излучения происходит равномерно на всем оптическом пути, проходимом так, что длина свободного пробега фотона, отсчитываемая от любой точки пространства до первого столкновения и поглощения его молекулой в среднем равна l, входящей в (1). Поэтому физически осмысленными являются любые $d\tau$ вплоть до малых величин порядка межмолекулярных расстояний в среде.

Уравнение (1) позволяет рассматривать необратимое поглощение средой лазерного или прямого солнечного излучения, распространяющегося в узком телесном угле при $\mu = 1$, при котором среда не излучает фотонов поглощаемой частоты и $S(\tau) = I(\tau,0) = 0$. В этом случае хорошо согласующееся с экспериментом решение уравнения (1) имеет вид:

$$I(\tau) = I(0)\, e^{-\tau} . \qquad (3)$$

Уравнение (1) имеет физический смысл только для интенсивности $I(\tau,\mu)$ в бесконечно малом телесном угле, намного меньшем всех остальных измеряемых телесных углов в задаче. Это видно, в частности, из того, что в пустом пространстве при $l = \infty$ правая часть (1) равна нулю, а левая часть для любого источника конечных размеров продолжает изменяться в силу расходимости лучей в любом конечном телесном угле. Поэтому уравнение (1) для интенсивности $I(\tau,\mu)$ физически осмыслено только при необратимом поглощении лазерного и прямого солнечного излучения, удовлетворяющих описанным выше критериям.

С помощью соотношения (3) измеряется величина поперечного сечения σ (коэффициента поглощения) молекул на разных частотах при известной плотности молекул поглотителя n. Учет столкновительного уширения контура линии в зависимости от плотности n (preassure broadening) показал, что при интегрировании по всему контуру изолированной линии или целой полосы поглощения зависимость пропускаемости $T(n)=\int e^{-\tau}d\nu$ и поглощаемости $1-T(n)$ могут изменяться по разному закону в зависимости от величины n:1 от линейного при малых n до корневого и логарифмического при больших n. Все эти зависимости являются следствием экспоненциального падения интенсивности с ростом τ(3). При этом с ростом n все величины в области вблизи центра, расширяющейся к крыльям контура линии поглощения, перестают зависеть от концентрации n, что рассматривается как насыщение поглощения.

Вывод:

Обычная форма уравнения переноса излучения в среде содержит необсуждаемые предположения, которые делают это уравнение применимым только для определенных видов распространения излучения типа лазерного и прямого солнечного излучения, которые распространяются без углового расхождения в пространстве и необратимо поглощаются средой. Распространение теплового излучения имеет принципиально иной характер.

2. Перенос теплового излучения в атмосфере: радиационное равновесие.

Тепловое излучение земной поверхности резонансно рассеивается на парниковых веществах атмосферы. При этом тепловые фотоны не исчезают, а меняют свое направление. Часть из них возвращается обратно к поверхности, где плотность энергии тепловых фотонов увеличивается. В результате, поток теплового излучения диффузионно распространяется в верхние слои атмосферы, и уходит в космос в процессе случайного блуждания тепловых фотонов.

Тепловые фотоны распространяются в любых направлениях с любыми значениями μ в (1). Поэтому уравнение (1) сохраняет математический смысл в лишь для интенсивности в бесконечно малом телесном угле, который не может быть физически измерен. Второй член $S(\tau)$ в правой части (1), определяющий изотропное излучение среды, начинает отличаться от первого на постоянную величину, не зависящую от интенсивности. Это следует, в частности, из соотношения (2). В результате, правая часть (1) перестает зависеть от интенсивности, что и определяет диффузионный характер распространения тепловых фотонов. Выделение интенсивности – первого члена в правой части (1) при переносе теплового излучения в атмосфере является математическим извращением. (Это соответствует записи уравнения $dy/dx = c$, $c = \text{const}$, имеющего решение $y(x) = y(0) + cx$, в виде $dy/dx = -y + z(x)$, $z(x) \equiv y + c$ и известным решением этого неоднородного уравнения $dy =$ $\left[y(0) + \int_0^x z(x) e^{x'} dx' \right] e^{-x}$. Подставляя в уравнение $z(x) \equiv y + c$, получаем интегральное уравнение на функцию $y(x)$. Дифференцируя обе части интегрального уравнения по x и вниматнльно сокращая подобные члены, приходим к первоначальному уравнению $dy/dx = c$.)

Таким образом, никаких следов от экспоненциального поведения (3) не остается при переносе теплового излучения в атмосфере. Понятия пропускаемости и поглощаемости, определенные через $e^{-\tau}$, теряют смысл. Исчезают также и связанные с этим зависимости любых физических величин от плотности парниковых веществ, типа корневых и логарифмических, которые, следовательно, не могут определять зависимости парникового эффекта от концентрации парниковых веществ.

3. Независимость переноса теплового излучения от среднеквадратичного отклонения длины свободного пробега тепловых фотонов

При наличии явных и скрытых потоков тепла в атмосферу диссипация их энергии приводит к нагреву воздуха в различных слоях атмосферы. В конечном счете энергия нерадиационных потоков посредством столкновительного возбуждения парниковых веществ переходит в тепловое излучение. В этом случае функция источника остается неопределенной и необходимо найти ее связь с диссипацией динамических потоков явного и скрытого тепла. Эту связь можно установить, полностью отказавшись от рассмотрения уравнений (1) и (2), и используя непосредственно закон сохранения энергии и тот замечательный факт, что поток распространения частиц или фотонов при случайном блуждании определяется только величиной средней длины свободного пробега и не зависит от среднеквадратичного отклонения этой величины. Это связано с тем, что отклонения от средней длины свободного пробега в положительном и отрицательном направлениях сокращаются в процессе случайных блужданий. Поэтому все рассмотрение можно выполнять при нулевой величине среднеквадратичного отклонения от средней длины свободного пробега.

Введем средние длины свободного пробега фотонов между двумя последовательными столкновениями l_c и средние длины свободного пробега фотонов от произвольной точки до первого столкновения l. При равной нулю дисперсии длины $\widehat{l}_c$ свободного пробега фотонов между двумя последовательными актами взаимодействия ("столкновениями") с молекулами парниковых веществ, средняя длина свободного пробега фотона от произвольной точки до столкновения с молекулой парникового вещества, l, связана со средней длиной пробега между двумя последовательными столкновениями, l_c, простым геометрическим соотношением:

$$l = \frac{l_c}{2}. \qquad (4)$$

Это соотношение возникает при усреднении начала отсчета $\widehat{l}$ от точки первого до точки второго столкновения, пролетаемого фотоном по прямой линии.

В уравнении (1) учитывалось, что вероятность фотону поглотиться веществом в любой точке пространства одинакова и не зависит от расстояния, пройденного фотоном до столкновения. В этом случае среднеквадратичное отклонение $\widehat{l}_c$ от среднего значения равно среднему значению l_c, а средняя длина свободного пробега от произвольной точки до столкновения l совпадает со средней длиной свободного пробега между двумя столкновениями l_c, $l = l_c$. (Наглядным примером различия между последним равенством и соотношением (4) может служить зависимость среднего времени ожидания транспорта на остановке от распределения транспорта на маршруте. В начале рабочего дня, когда транспорт подходит к остановке через строго заданные расписанием промежутки времени T_c, среднее время T ожидания транспорта на остановке равно $T_c/2$, $T = T_c/2$, среднеквадратичное отклонение T равно нулю. Однако в течение дня транспорт случайно перераспределяется по маршруту и начинает подходить к остановке через произвольные промежутки времени, среднеквадратичное отклонение времени ожидания T становится равным T. При этом, при неизменности общего количества транспорта на маршруте и средней скорости движения, время ожидания на остановке увеличивается вдвое, становясь равным среднему промежутку времени между двумя последовательными подходами транспорта к остановке, $T = T_c$.)

4. Учет явных и скрытых потоков тепла с земной поверхности в атмосферу

Разобьем всю атмосферу на n соприкасающихся слоев, каждый из которых имеет толщину, равную l_c, рис. 1. Длина свободного пробега l_c естественно увеличивается с высотой в силу уменьшения плотности воздуха и различается в различных слоях. Так как дисперсия $\widehat{l_c}$ положена равной нулю, в каждом слое k будет происходить поглощение (и переиспускание) тепловых фотонов, испущенных только в соседних нижнем k - 1 и верхнем k + 1 слоях.

Покажем, что при переходе из одного слоя толщиной l_c в следующий только 2/3 потока излучения заданного слоя изменяется в результате столкновений с молекулами парниковых веществ в следующем слое. Остальная 1/3 часть фотонов потока излучения претерпевает столкновение внутри одного и того же слоя и не передает энергию соседним слоям.

Фотон, испускаемый из определенной точки, удаленной от границы верхнего слоя $k - 1$ на глубину x в заданном слое k, рис. 2, претерпевает столкновение с веществом в следующем слое $k - 1$, если угол его вылета по отношению к оси z не превышает ϑ, где $\cos\vartheta = x / l_c = \mu$. Индекс k у l_c для простоты опущен. Обозначим через I_k мощность изотропного излучения единицы объема парникового вещества в единице телесного угла. Поток F_k, испускаемый k-ым слоем в верхнюю (+) и нижнюю (–) полуплоскости, равен $F_k^{\pm} = 2\pi I_k\, l_c \int_0^1 \mu d\mu =$ $\pi I_k\, l_c$. Поток фотонов теплового излучения, $d\widehat{F}_k(x)$, испускаемых из части слоя k толщиной dx и претерпевающих столкновение с молекулами парникового вещества в следующем $(k-1)$-ом слое, равен:

$$d\widehat{F}_k(x) = 2\ \pi I_k\, dx \int\limits_{x/l_c}^{1} \mu d\mu = F_k\ \frac{dx}{l_c}\left(1-\frac{x^2}{l_c^2}\right).$$

Соответствующий поток из всего k слоя $\widehat{F}_k(l_c)$ равен:

$$\widehat{F}_k(l_c)\ = F_k \int\limits_0^{l_c} \frac{dx}{l_c}\left(1-\frac{x^2}{l_c^2}\right) = \frac{2}{3}\ F_k. \qquad (5)$$

Таким образом, лишь 2/3 потока фотонов $F_k^{\pm}$ передает энергию из одного слоя в следующий путем однократного столкновения тепловых фотонов с молекулами парниковых веществ. Остальная треть тепловых фотонов не выходит за пределы каждого слоя.

Закон сохранения энергии в k-м слое может быть представлен в виде

$$\frac{2}{3}\ F_k^{+} + \frac{2}{3}\ F_k^{-} = \frac{2}{3}\ F_{k+1}^{+} + \frac{2}{3}\ F_{k-1}^{-} + A_k,\quad \sum_{k=1}^{n} A_k = A,\ \ F_{\rm in} - A = H_s,\ \ F_{n+1}^{+} \equiv F_s. \quad (6)$$

Здесь $A_k > 0$ представляет собой приток в слой k нерадиационной энергии явного и скрытого тепла и солнечного излучения, переходящих в тепловое излучение после диссипации этой энергии в слое k; A -- полный приток скрытого и явного тепла и солнечного излучения, подвергающегося диссипации во всем атмосферном столбе, $A \geq 0$; $F_{\rm in}$ -- вся поглощенная Землей солнечная энергия (включая солнечную энергию, поглощенную в атмосфере), равная в стационарном случае потоку теплового излучения Земли, уходящему в космос, F_e; разность $H_s \equiv F_{\rm in} - A$ -- та часть потока солнечной энергии, которая подвергается полной диссипации на земной
поверхности, $H_s > 0$, F_s -- поток теплового излучения земной поверхности.

Граничные условия $F_0^{-} = 0$, $F_0^{+} = \dfrac{2}{3}\ F_1^{+} = F_e$, $\left(F_1^{+} - F_0^{-}\ = \dfrac{3}{2} F_e\right)$ соответствуют тому, что тепловое излучение слоя с $k = 0$ уходит в космос. Уравнение (6) может быть записано в виде:

$$H_{k+1} - H_k = \frac{3}{2}\ A_k,\quad H_k \equiv\ F_k^{+} - F_{k-1}^{-}.$$

Принимая во внимание, что потоки излучения в каждом k слое изотропны и $F_k^{+} = F_k^{-}$, в континусльном представлении можно записать (7) в виде:

$$\frac{dH(k)}{dk} = -\frac{3}{2}\,A_k,\quad H(k) = \frac{dF^+(k)}{dk},\qquad H(0) = \frac{3}{2}\,F_e \tag{8}$$

Для потока $F^+(k)$ последнее уравнение принимает вид обычного уравнения диффузии:

$$\frac{d^2F^+(k)}{dk^2} = -\frac{3}{2}\,A_k,\qquad \left.\frac{dF^+(k)}{dk}\right|_{k=0} = \frac{3}{2}\,F_e,\qquad F^+(0) = F_e. \tag{9}$$

Используем обычное в атмосферных исследованиях определение оптической глубины и толщины атмосферы, когда высота z отсчитывается от земной поверхности вверх:

$$\tau = \int_z^\infty \frac{dz'}{l(z')},\qquad \tau_s = \int_0^\infty \frac{dz}{l(z)},\qquad d\tau = -dz/l(z) \tag{10}$$

Оптическая глубина τ(10) на заданной высоте z определяется как число слоев толщиной l (см. (4) и раздел 3), расположенных выше точки z. Используя соотношение (4), получаем:

$$k = \frac{\tau}{2},\qquad n = \frac{\tau_s}{2},\qquad dk = \frac{d\tau}{2}, \tag{11}$$

где k и n соответствующее число слоев толщиной l_c. В результате получаем:

$$\frac{d^2F^+(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{3}{4}\,A(\tau),\qquad \left.\frac{dF^+(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau\to 0} = \frac{3}{4}F_e(0)\,;\ F_e = F^+(0), \tag{12}$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k = \int_0^{\tau_s} A(\tau)d\tau,\qquad d\tau = 2\,dk,\qquad A(\tau) = \frac{1}{2}\,A(k).$$

Решения уравнений (12) с учетом граничного условия $H(0) = F^+(0)$ $= F_e$ имеет вид:

$$F^+(\tau) = \left(1 + \frac{3}{4}\tau\right)F_e - \frac{3}{4}\int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} A(\tau'')d\tau''\,. \tag{13}$$

Путем интегрирования по частям двойной интеграл в (13) может быть преобразован в однократный. Вводя переменные $x \equiv \tau/\tau_s$ и $a(x) = \tau_s A(x)/A$, поток излучения на земной поверхности можно записать в виде:

$$F_s \equiv F^+(\tau_s) = (1 + K\tau_s)\,F_e,\qquad K = \frac{3}{4}\,[\alpha + \beta\gamma], \tag{14}$$

$$\alpha \equiv H_s/F_e,\quad \beta \equiv A/F_e,\quad \alpha + \beta = 1,\quad \gamma \equiv \int_0^1 xa(x)dx,\quad \int_0^1 a(x)dx = 1.$$

Диссипация явного и скрытого тепла пропорциональна давлению газа p на высоте z и в силу соотношения $\tau/\tau_s = p/p_s$ пропорциональна x. Поэтому $a(x) \sim x$, условие нормировки для $a(x)$ дает $a(x) = 2x$ и $\gamma = 2/3$. Поэтому $0{,}5 \leq K \leq 0{,}75$. При $A = 0$ (случай радиационного равновесия) $K = 3/4$ и точное решение (13) совпадает с приближением Эддингтона для уравнения (1), см. Приложение 2.

Отметим, что уравнение (12) описывает перенос теплового излучения при любых неоднородностях распределения парниковых веществ в атмосфере, в то время как уравнение (1) справедливо только для однородной атмосферы, когда вероятность поглощения фотона не зависит от пройденного фотоном пути. Поэтому результат (14) является для теплового излучения точным, а не приближенным..

Учет нерадиационных потоков тепла при больших τ приводит лишь к изменению постоянного, не зависящего от τ_s и, следовательно, от концентрации парниковых веществ коэффициента K перед линейным членом по τ_s. Отличие K от 3/4 определяется столкновительным возбуждением парниковых веществ и не зависит от частоты испускаемого теплового излучения. Подчеркнем, что отношение F_s / F_e и, следовательно, парниковый эффект возрастает линейно с увеличением τ_s и, следовательно, пропорционален концентрации парниковых веществ. При этом никакого насыщения с увеличением концентрации не возникает.

5. Зависимость парникового эффекта от концентрации парниковых веществ

Все вышеприведенные результаты получены для монохроматического излучения.

В силу резонансного характера взаимодействия теплового излучения с парниковыми веществами, в которых поглощение и последующее испускание теплового излучения происходит без изменения его частоты ν, формула (13) остается справедливой для каждой отдельной полосы поглощения парниковых веществ. Поток излучения земной поверхности, F_s, близок к равновесному излучению абсолютно черного тела σT_s^4 с температурой поверхности T_s и характеризуется планковским распределением F_p (ν,T_s) по различным частотам спектра теплового излучения. Поток излучения земной поверхности F_{si} при частоте ν_i в области спектральной полосы поглощения с шириной $\Delta\nu_i$ может быть представлен в виде:

$$F_{si} = \delta_i F_s, \qquad \delta_i \equiv \frac{\Delta\nu_i F_p(\nu_i, T_s)}{F_s}, \qquad F_s = \sigma T_s^4, \qquad \sum_{i=1}^{N} \delta_i = 1, \quad (15)$$

где N -- сумма всех спектральных интервалов полос поглощения теплового спектра, включая спектральные окна, где поглощение атмосферой отсутствует, т.е. $\tau_{si} = 0$. Обозначая поток излучения в космос в области i –й спектральной полосы, через F_{ei} можно переписать формулу (14) в области i -й спектральной полосы в виде:

$$F_s\delta_i = (1 + K\tau_{si})F_{ei}, \; \sum_{i=1}^{N} F_{ei} = F_e. \qquad (16)$$

Предполагая, что нерезонансное столкновительное возбуждение полос поглощения парниковых веществ одинаково во всем тепловом спектре, можно считать, что коэффициент K, учитывающий диссипацию нерадиационных потоков энергии, не зависит от ν и, следовательно, от i в (16). Выражение для связи потоков излучения земной поверхности F_s и излучения в космос F_e из (15) и (16) получаем в виде:

$$F_s = \frac{F_e}{T(n)}, \quad T(n) \equiv \sum_{i=1}^{N} T_i(n_i), \quad T_i(n_i) \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{1 + K\tau_{si}},$$

$$\tau_{si} = \int_0^\infty \frac{dz}{l_i(z)}, \qquad l_i(z) = [n_i(z)\,\sigma_i]^{-1}, \qquad (17)$$

где $n_i(z)$ и σ_i -- концентрация и поперечное сечение поглощения теплового излучения, соответственно, i-го парникового вещества σ_i равно сумме интенсивностей всех линий в i-й полосе поглощения, деленной на ее ширину $\Delta\nu_i$; σ_i не зависит от столкновительного уширения и давления газа. Пропускаемость теплового излучения не обладает эффектом насыщения и стремится к нулю в каждой i полосе поглощения с ростом τ_{si} пропорционально

$\tau_{si}{}^{-1}$. В случае серого парникового вещества пропускаемость теплового излучения в космос равна $(1 + K\tau_s)^{-1}$.

Таким образом, в настоящей работе показано, что точное решение диффузионного уравнения для теплового излучения поверхности планеты при учете нерадиационных потоков энергии сохраняет вид известного приближения Эддингтона для уравнения (1), в котором происходит изменение множителя перед линейным членом. Этот множитель однозначно вычисляется по измеряемым величинам распределения по высоте плотности диссипации нерадиационных потоков энергии.

Отметим, что приведенное рассмотрение не эквивалентно использованию двухпотоковых приближений, нарушающих и первое и второе начала термодинамики, см. Приложение 4. Оно также не связано с использованием локального термодинамического равновесия, нарушающего второе начало термодинамики в земной атмосфере, где оптические толщины всех парниковых веществ имеют порядок единицы и распределение поглощения парниковых веществ по частотам теплового спектра сильно отклоняется от равномерного (серого) поглощения, см. Приложение 3.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Пропускаемость теплового излучения

Прямое солнечное излучение при прохождении через атмосферу необратимо выбывает из первоначального пучка лучей, который ослабляется экспоненциально. Пропускаемость $T_\nu(\tau)$ -- отношение потоков излучения в конечном F_e и начальном F_s пучке лучей $T_\nu(\tau) = F_{\nu\,\mathrm{out}}/ F_{\nu\,\mathrm{in}} = e^{-\tau_\nu}$, где τ_ν — пройденный пучком оптический путь. Интегрирование пропускаемости по частотам ν изолированной линии или полосы поглощения приводит к зависимости пропускаемости от концентрации поглотителя n, пропорциональной n при малых n и корневой и логарифмической зависимости по n при больших n с эффектом полного поглощения (насыщения) вблизи центра линии.

Пропускаемость теплового излучения в полосе поглощения $\Delta\nu$ $T_{\Delta\nu} = (1 + K\tau\Delta\nu)^{-1}$ не зависит от уширения линий при росте давления и не может приводить к корневым и логарифмическим зависимостям от концентрации парниковых веществ. Тем не менее, до сих пор теоретически рассматриваются логарифмические зависимости парникового эффекта, в частности, от концентрации CO_2. Рассмотрим, на чем основаны ошибки таких выводов.

а) Во-первых, уравнение (1) для интенсивности, определенной в конечном телесном угле, не имеет физического смысла для теплового излучения, распространяющегося в атмосфере под произвольными углами. Рассмотрение уравнения для интенсивности (в бесконечно малом телесном угле) в направлении распространения потока монохроматического излучения при $\mu = 1$ имеет вид:

$$\frac{dI(\tau)}{d\tau} = I(\tau) - S(\tau). \qquad (\text{П}1)$$

Рассматривая $S(\tau)$ как внешнее поле, можно записать решение неоднородного уравнения через решение однородного (при $S(\tau) = 0$) в виде:

$$I(0) = I(\tau)e^{-\tau} + \int_0^{\tau} S(\tau')e^{-\tau'}d\tau'. \qquad (\text{П}2)$$

Далее в (П2) полагается $S(\tau') = B(T(\tau))$, где B -- планковское распределение теплового излучения на заданной частоте, а $T(\tau)$ -- температура среды (воздуха) на оптическом пути τ. Выражению (П2) дается физическая интерпретация: до верхних слоев атмосферы, где $\tau = 0$, доходит излучение поверхности, ослабленное в $e^{-\tau}$ раз, и сумма излучения всех слоев атмосферы, где происходит тепловое излучение атмосферы $S(\tau') = B(T(\tau'))$, каждое из которых ослаблено в $e^{-\tau'}$ раз, соответствующее τ' атмосферного слоя. Затем производится интегрирование по частотам в предположении, что зависимость от частоты $S(\tau)$ значительно более плавная, чем $e^{-\tau}$, что и приводит к корневым и логарифмическим завимостям от концентрации поглотителей теплового излучния, как и в случае лазера. Далее полагается, что на земной поверхности $S(\tau_s) = I(\tau_s)$, в то время как за пределами атмосферы $S(0) = 0$, что дает возможность записать парниковый эффект $G(\tau_s)$, используя (П2), в виде (Raval, Ramanathan, 1989):

$$G(\tau_s) = I(\tau_s) - I(0) = \int_0^1 A(x)\frac{dB(x)}{dx}dx\,, \qquad \text{(П3)}$$

где $x \equiv \dfrac{\tau}{\tau_s} = \dfrac{p}{p_s}$, $A(x) = \left(1 - e^{-\tau_s x}\right)$ -- поглощаемость.

Хотя (П3) выводится из (П1) без математических ошибок, все выражения (П1)-(П3) содержат грубые физические ошибки и поэтому не характеризуют физику теплового излучения.

б) Уравнение (П1), кроме недопустимости использования интенсивности для теплового излучения, содержит неправомерное выделение интенсивности в качестве первого члена в правой части. В действительности, функция $S(\tau)$ отличается от интенсивности на постоянное, не зависящее от интенсивности слагаемое, см. (2):

$$S(\tau) = I(\tau) - I_0. \qquad \text{(П4)}$$

Поэтому уравнение (П1) в действительности имеет вид:

$$\frac{dI(\tau)}{d\tau} = I_0, \text{ т.е. } I(0) = I(\tau_s) - I_0\tau_s, \quad D(\tau_s) = I_0\tau_s. \qquad \text{(П5)}$$

Подставляя (П4) в (П2) и интегрируя по частям, получим (П5), где все следы экспоненты $e^{-\tau}$ исчезают.

Использование условия $S(\tau_s) = I(\tau_s)$ при получении (П3) представляет собой грубейшую физическую ошибку. Это условие выполняется только для равновесного излучения в полости, где нет переноса тепловых фотонов. Перенос тепловых фотонов соответствует равенству (П4), в котором $S(\tau_s)$ отличается от $I(\tau_s)$ на постоянную величину, которая и соответствует процессу переноса.

2. Приближение Эддингтона

Уравнение (1) справедливо только для интенсивности в бесконечно малом телесном угле, который не может быть физически измерен для теплового излучения, распространя.щегося под любыми углами. Это относится и к уравнению (П1), которое теряет физический смысл для теплового излучения.

Поэтому для теплового излучения физический смысл имеют только интегралы от интенсивности, умноженной на различные степени косинуса μ по телесному углу. Выбирая в качестве единиц измерения скорость света $c = 1$ и единицу телесного угла $4\pi = 1$, получаем после интегрирования по μ следующую связь потоков $F^{\pm}(\tau)$ и плотностей энергии $E^{\pm}(\tau)$ теплового излучения, распространяющегося в верхнюю (+) и нижнюю (–) полуплоскости:

$$F^{\pm}(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mu I(\tau,\pm\mu)d\mu\,, \quad E^{\pm}(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^1 I(\tau,\pm\mu)d\mu\,, \qquad (\text{П6})$$

$$H \equiv F^{+} - F^{-}, \quad E \equiv E^{+} + E^{-}, \quad H(0) = F^{+}(0) = F_e, \quad F^{-}(0) = 0, \qquad (\text{П7})$$

где $H(\tau)$ -- полный (суммарный) поток, $E(\tau)$ -- поолная плотность энергии теплового излучения.

Интегрируя уравнение (1) по μ и используя определения (П6), получаем:

$$\pm\frac{dF^{\pm}(\tau)}{d\tau} = E^{\pm}(\tau) - \frac{1}{2}S(\tau)\,,$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = -Q(\tau)\,, \quad Q(\tau) \equiv S(\tau) - E(\tau) \geq 0. \qquad (\text{П8})$$

В отсутствие нерадиационных потоков энергии $S(\tau) = E(\tau)$ и $Q(\tau) = 0$, $H(\tau) = H(0) = F_e$. Это так называемое условие радиационного равновесия. Однако в присутствие явных и скрытых потоков тепла уравнение (1) не содержит информации о том, что представляет собой величина $Q(\tau)$.

При $\tau \geq 1$ распределение теплового излучения по углам определяется изотропным излучением парниковых веществ атмосферы. Поэтому в интегралах по μ (П6) (кроме полного потока H, определяющего распространение теплового излучения по z) можно положить $I(\tau,\mu) = I(\tau,0) = S(\tau)$ и

$$F^{\pm}(\tau) = \frac{1}{4}I(\tau,0) = \frac{1}{4}\,S(\tau). \qquad (\text{П9})$$

Умножая обе части (1) на $\mu/2$, интегрируя в пределах от –1 до +1 и используя в левой части соотношение (П9), получаем:

$$\frac{dF^{\pm}(\tau)}{d\tau} = \frac{3}{4}H(\tau)\,, \quad \left.\frac{dF^{\pm}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{3}{4}F_e\,, \quad F^{+}(0) = H(0) = F_e\,. \qquad (\text{П10})$$

Дифференцируя обе части (П10) по τ и используя (П8), получаем:

$$\frac{d^2F^{\pm}(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{3}{4}Q(\tau)\,. \qquad (\text{П11})$$

При $Q(\tau) = 0$ с учетом граничного условия (П10) из (П11) получаем:

$$F^{\pm}(\tau) = \left(1 + \frac{3}{4}\tau\right)F_e . \qquad \text{(П12)}$$

Соотношение (П12) носит название приближение Эддингтона для уравнения (1). Оно является точным при $\tau > 1$ и остается справедливым при любых τ с относительной точностью 6%.

В присутствии явных и скрытых потоков тепла величина $Q(\tau)$ (П8) зависит от перехода энергии этих потоков $A(\tau)$ в тепловое излучение при разных τ. Так как единственным масштабом потока теплового излучения является поток излучения в космос F_e, то зависимость $Q(\tau)$ от $A(\tau)$ может быть представлена в виде:

$$Q(\tau) = F_e f(y), \quad y \equiv \frac{A(\tau)}{F_e} . \qquad \text{(П13)}$$

При $y = 0$ $Q(\tau) = F_e f(0) = 0$. Поэтому при малых $y << 1$ имеем:

$$f(y) = cy \quad \text{и} \quad Q(\tau) = cA(\tau). \qquad \text{(П14)}$$

При этом коэффициент c остается неопределенным. При больших $y \geq 1$ уравнение (1) не содержит никакой информации о величине $Q(\tau)$ и $f(y)$.

Рассмотрение, проведенное в разделе 4, приводит к уравнению (12), совпадающему с (П11) при $Q(\tau) = A(\tau)$ при любых τ и, тем самым, дает исчерпывающую физическую интерпретацию уравнения (П11), представляющего собой в действительности диффузионное уравнение для теплового излучения.

3. ЛТР и радиационный перенос

Приближение локального термодинамического равновесия (ЛТР) сводится к равенству $S(\tau) = B(T(\tau))$, где $T(\tau)$ -- температура воздуха на оптической глубине τ, $B(T)$ -- планковская функция. Это приближение применимо при больших $\tau >> 1$, когда локальная плотность излучения и поток излучения определяются преимущественно локальным излучением среды, и равномерного излучения среды во всем тепловом спектре. Эти условия выполняются в звездных атмосферах. В земной атмосфере температура воздуха должна приближаться, но быть все же выше яркостной температуры излучения наиболее интенсивной полосы (или линии) поглощения с наибольшим значением оптической глубины на заданной высоте z. Только в этом случае диссипация нерадиационных потоков энергии явного и скрытого тепла, нагревающая воздух на оптической глубине τ, может путем столкновительного возбуждения переходить в этой полосе поглощения в тепловое излучение. Отклонение температуры воздуха от температуры излучения, т.е. отклонение от ЛТР, определяется отношением нерадиационного и радиационного возбуждения интенсивной полосы поглощения. В слабых полосах поглощения с малыми оптическими глубинами на той же высоте z яркостная температура излучения существенно выше температуры воздуха, энергия диссипации явного и скрытого тепла не может переходить в тепловое излучение, и тепловое излучение в этих областях спектра полностью не соответствует ЛТР.

4. Двухпотоковые уравнения и радиационный перенос

Двухпотоковые уравнения строятся, исходя из одномерного случая, когда излучение может распространяться строго только вверх $\mu=+1$ или вниз $\mu=-1$. В этом случае интенсивность совпадает с потоком и плотностью энергии $F^{\pm} = E^{\pm}$ (в принятых единицах измерения, $c = 1$, $4\pi = 1$). Уравнения (1) и (П8) превращаются в уравнения для потоков $F^{\pm}$:

$$\pm\frac{dF^{\pm}(\tau)}{d\tau} = \left[F^{\pm}(\tau) - \frac{1}{2}S(\tau)\right]; \qquad \text{(П15)}$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = -Q(\tau)\,;\ Q(\tau) \equiv S(\tau) - E(\tau)\,; \qquad \text{(П16)}$$

$$H(\tau) \equiv F^{+}(\tau) - F^{-}(\tau), \qquad E(\tau) \equiv F^{+}(\tau) + F^{-}(\tau),$$

В условиях радиационного равновесия (отсутствия нерадиационных потоков энергии скрытого и явного тепла) функция источника $S(\tau)$ равна:

$$S(\tau) = F^{+}(\tau) + F^{-}(\tau), \quad dH(\tau)/d\tau = 0, \quad H(\tau) = H(0) = F^{+}(0) = F_e \qquad \text{(П17)}$$

и уравнение (П15) и его точное решение при всех τ имеет вид:

$$\frac{dF^{\pm}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}F_e, \qquad F^{+}(\tau) = \left(1 + \frac{1}{2}\tau\right)F_e \qquad \text{(П18)}$$

Подчеркнем, что (П18) не содержат никаких экспонент и соответствуют линейному росту $F^{+}(\tau)$ с τ.

В трехмерном случае приближенные двухпотоковые уравнения строятся из (П15) путем домножения на геометрический множитель, учитывающий распространение излучения в направлениях с любыми μ и записываются аналогично (П15) в виде:

$$\pm\frac{dF^{\pm}(\tau)}{d\tau}=G\left[2F^{\pm}(\tau)-\frac{S(\tau)}{2}\right], \qquad (П19)$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau}=-Q(\tau), \quad +Q(\tau)\equiv G\left[2F^{+}(\tau)+2F^{-}(\tau)-S(\tau)\right],$$

$$H(\tau)\equiv F^{+}(\tau)-F^{-}(\tau), \qquad (П20)$$

где G -- безразмерный числовой коэффициент.

Дополнительная 2 перед $F^{\pm}(\tau)$ в (П19) связана с заменой $E^{\pm}(\tau)$ на $F^{\pm}(\tau)$ в (П8). В условиях радиационного равновесия имеем:

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau}=0, \quad H(\tau)=H(0)=F_e;\ Q(\tau)=0;$$

$$\frac{dF^{+}(\tau)}{d\tau}=GH=GF_e, \quad F^{+}(\tau)=\left(1+G\tau\right)F_e. \qquad (П21)$$

Выражение (П21) приводит к приближению Эддингтона при $G=\frac{3}{4}$. Однако в этом случае соотношение (П20) при больших $\tau>>1$, когда $F^{\pm}=\frac{E^{\pm}}{2}$, совпадает с (П8) при $G=1$ и нарушает (П8) при $G=\frac{3}{4}$. При $G=1$ нарушается приближение Эддингтона. В отсутствие радиационного равновесия уравнение (П19) для F^{+} может быть записано в виде:

$$\frac{dF^{+}(\tau)}{d\tau}=G\left[H(\tau)+\frac{1}{2}Q(\tau)\right]. \qquad (П22)$$

Дифференцируя (П22) по τ и используя (П20), получаем:

$$\frac{d^2F^{+}(\tau)}{d\tau^2}=-G\left[Q(\tau)-\frac{1}{2}\frac{dQ(\tau)}{d\tau}\right]. \qquad (П23)$$

Уравнение (П23), полученное из двухпотокового приближения (П19), отличается при $G=\frac{3}{4}$ последним членом от уравнения (П20), полученного из (1) и (П8), учитывающего закон сохранения энергии. Таким образом, двухпотоковое приближение противоречит закону сохранения энергии и поэтому неверно. При любом выборе G это противоречие не исчезает. Подчеркнем, что уравнение (12) не имеет ничего общего с двухпотоковыми приближениями, так как получено непосредственно из закона сохранения энергии. Кроме того, выражение для $S(\tau)$, входящем в $Q(\tau)$, остается неопределенным. При использовании ЛТР для идентификации $S(\tau)$ условием $S(\tau) = Q(T(\tau))$ возникают разрывы температуры воздуха у земной поверхности с нарушениями как первого, так и второго начал термодинамики (Weaver, Ramanathan, 1995).